

数 学

数学科考试旨在测试中学数学基础知识、基本技能、基本方法,考查数学思维能力,包括:空间想象、直觉猜想、归纳抽象、符号表示、运算求解、演绎证明、体系构建等,以及运用所学数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。

考试分为理工农医和文史财经两类.理工农医类考试范围包括代数、三角、平面解析几何、立体几何和概率与统计初步五部分.文史财经类考试范围包括代数、三角、平面解析几何和概率与统计初步四部分。

考试内容的知识要求和能力要求作如下说明。

1. 知识要求

本大纲对所列知识提出了三个层次的不同要求,三个层次由低到高顺序排列,且高一级层次要求包含低一级层次要求.三个层次分别为:

了解:要求考生对所列知识的含义有初步的认识,识记有关内容,并能进行直接运用。

理解、掌握、会:要求考生对所列知识的含义有较深的认识,能够解释、举例或变形、推断,并能运用知识解决有关问题。

灵活运用:要求考生对所列知识能够综合运用,并能解决较为复杂的数学问题。

2. 能力要求

逻辑思维能力:会对问题进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括;会用演绎、归纳和类比进行推理;能准确、清晰、有条理地进行表述。

运算能力:理解算理,会根据法则、公式、概念进行数、式、方程的正确运算和变形;能分析条件,寻求与设计合理、简捷的运算途径;能根据要求对数据进行估计。

空间想象能力:能根据条件画出正确图形,根据图形想象出直观形

象;能正确地分析出图形中的基本元素及其相互关系;能对图形进行分解、组合、变形.

分析问题和解决问题的能力:能阅读理解对问题进行陈述的材料;能综合应用所学数学知识、思想和方法解决问题,包括解决在相关学科、生产、生活中的数学问题,并能用数学语言正确地加以表述.

考 试 内 容

理工农医类

第一部分 代 数

(一) 集合和简易逻辑

1. 了解集合的意义及其表示方法.了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法,了解符号 $\subseteq, \supset, =, \in, \notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.

2. 理解充分条件、必要条件、充分必要条件的概念.

(二) 函数

1. 理解函数的概念,会求一些常见函数的定义域.

2. 了解函数的单调性和奇偶性的概念,会判断一些常见函数的单调性和奇偶性.

3. 理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图像和性质,会求它们的解析式.

4. 理解二次函数的概念,掌握它的图像和性质以及函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像间的关系;会求二次函数的解析式及最大值或最小值,能灵活运用二次函数的知识解决有关问题.

5. 了解反函数的意义,会求一些简单函数的反函数.

6. 理解分数指数幂的概念,掌握有理指数幂的运算性质.掌握指数函数的概念、图像和性质.

7. 理解对数的概念,掌握对数的运算性质,掌握对数函数的概念、图像和性质.

(三) 不等式和不等式组

1. 理解不等式的性质.会用不等式的性质和基本不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$, $|a+b| \leq |a|+|b| (a, b \in \mathbf{R})$ 解决一些简单问题.

2. 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式.会解一元二次不等式.会表示不等式或不等式组的解集.

3. 了解绝对值不等式的性质,会解形如 $|ax+b| \geq c$ 和 $|ax+b| \leq c$ 的绝对值不等式.

(四) 数列

1. 了解数列及其通项、前 n 项和的概念.

2. 理解等差数列、等差中项的概念,会灵活运用等差数列的通项公式、前 n 项和公式解决有关问题.

3. 理解等比数列、等比中项的概念,会灵活运用等比数列的通项公式、前 n 项和公式解决有关问题.

(五) 复数

1. 了解复数的概念及复数的代数表示和几何意义.

2. 会进行复数的代数形式的加、减、乘、除运算.

(六) 导数

1. 了解函数极限的概念,了解函数连续的意义.

2. 理解导数的概念及其几何意义.

3. 会用基本导数公式 ($y=c$, $y=x^n (n \text{ 为有理数})$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=e^x$ 的导数),掌握两个函数和、差、积、商的求导法则.

4. 理解极大值、极小值、最大值和最小值的概念,并会用导数求有关函数的单调区间、极大值、极小值及闭区间上的最大值和最小值.

5. 会求有关曲线的切线方程,会用导数求简单实际问题的最大值与最小值.

第二部分 三 角

(一) 三角函数及其有关概念

1. 了解任意角的概念,理解象限角和终边相同的角的概念.
2. 理解弧度的概念,会进行弧度与角度的换算.
3. 理解任意角三角函数的概念.了解三角函数在各象限的符号和特殊角的三角函数值.

(二) 三角函数式的变换

1. 掌握同角三角函数间的基本关系式、诱导公式,会用它们进行计算、化简和证明.
2. 掌握两角和、两角差、二倍角的正弦、余弦、正切的公式,会用它们进行计算、化简和证明.

(三) 三角函数的图像和性质

1. 掌握正弦函数、余弦函数的图像和性质,会用这两个函数的性质(定义域、值域、周期性、奇偶性和单调性)解决有关问题.
2. 了解正切函数的图像和性质.
3. 了解函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 与 $y = \sin x$ 的图像之间的关系,会用“五点法”画出它们的简图,会求函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期、最大值和最小值.

(四) 解三角形

1. 掌握直角三角形的边角关系,会用它们解直角三角形及应用题.
2. 掌握正弦定理和余弦定理,会用它们解斜三角形及简单应用题.

第三部分 平面解析几何

(一) 平面向量

1. 理解向量的概念,掌握向量的几何表示,了解共线向量的概念.
2. 掌握向量的加、减运算.掌握数乘向量的运算.了解两个向量共线的条件.
3. 了解平面向量的分解定理.掌握直线的向量参数方程.
4. 掌握向量的数量积运算,了解其几何意义和在处理长度、角度

及垂直问题的应用.掌握向量垂直的条件.

5. 掌握向量的直角坐标的概念,掌握向量的坐标运算.

6. 掌握平面内两点间的距离公式、线段的中点公式和平移公式.

(二) 直线

1. 理解直线的倾斜角和斜率的概念,会求直线的斜率.

2. 会求直线方程,能灵活运用直线方程解决有关问题.

3. 掌握两条直线平行与垂直的条件以及点到直线的距离公式,会用它们解决有关问题.了解两条直线所成角的公式.

(三) 圆锥曲线

1. 了解曲线和方程的关系,会求两条曲线的交点.

2. 掌握圆的标准方程和一般方程以及直线与圆的位置关系,能灵活运用它们解决有关问题.

3. 理解椭圆、双曲线、抛物线的概念,掌握它们的标准方程和性质,能灵活运用它们解决有关问题.

4. 了解参数方程的概念,了解圆和椭圆的参数方程.

第四部分 立体几何

(一) 直线和平面

1. 了解平面的基本性质.

2. 了解空间两条直线的位置关系以及异面直线所成角的概念.

3. 了解空间直线和平面的位置关系.理解直线和平面垂直的概念.理解点到平面的距离的概念.理解直线和平面平行、垂直的判定定理和性质定理.

4. 了解点、斜线和斜线段在平面内射影的概念,了解直线和平面所成角的概念.

5. 了解空间两个平面的位置关系,以及二面角、二面角的平面角的概念.

(二) 空间向量

1. 理解空间向量的概念,掌握空间向量的加法、减法和数乘向量的运算.掌握向量平移.

2. 了解空间向量分解定理,理解直线的方向向量.
3. 掌握空间向量数量积的定义及其运算,会解决空间直线的平行、垂直、夹角等几何问题.

(三) 多面体和旋转体

1. 了解直棱柱、正棱柱的概念和性质,会计算它们的体积.
2. 了解棱锥、正棱锥的概念和性质,会计算它们的体积.
3. 了解球的概念和性质,会计算球面面积和球体体积.

第五部分 概率与统计初步

(一) 排列、组合与二项式定理

1. 了解分类计数原理和分步计数原理.
2. 理解排列、组合的意义,掌握排列数、组合数的计算公式.
3. 会解排列、组合的简单应用题.
4. 了解二项式定理,会用二项展开式的性质和通项公式解决简单问题.

(二) 概率初步

1. 了解随机事件及其概率的意义.
2. 了解等可能性事件的概率的意义,会用计数方法和排列组合基本公式计算一些等可能性事件的概率.
3. 了解互斥事件的意义,会用互斥事件的概率加法公式计算一些事件的概率.
4. 了解相互独立事件的意义,会用相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率.
5. 会计算事件在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率.
6. 了解离散型随机变量及其期望的意义,会根据离散型随机变量的分布列求出期望值.

(三) 统计初步

了解总体和样本的概念,会计算样本平均数和样本方差.

文史财经类

第一部分 代 数

(一) 集合和简易逻辑

1. 了解集合的意义及其表示方法.了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法,了解符号 $\subseteq, \supseteq, =, \in, \notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.

2. 了解充分条件、必要条件、充分必要条件的概念.

(二) 函数

1. 了解函数的概念,会求一些常见函数的定义域.

2. 了解函数的单调性和奇偶性的概念,会判断一些常见函数的单调性和奇偶性.

3. 理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图像和性质,会求它们的解析式.

4. 理解二次函数的概念,掌握它的图像和性质以及函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图像间的关系;会求二次函数的解析式及最大值或最小值.能运用二次函数的知识解决有关问题.

5. 理解分数指数幂的概念,掌握有理指数幂的运算性质.掌握指数函数的概念、图像和性质.

6. 理解对数的概念,掌握对数的运算性质.掌握对数函数的概念、图像和性质.

(三) 不等式和不等式组

1. 了解不等式的性质.会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式,会解一元二次不等式.会表示不等式或不等式组的解集.

2. 会解形如 $|ax+b|\geq c$ 和 $|ax+b|\leq c$ 的绝对值不等式.

(四) 数列

1. 了解数列及其通项、前 n 项和的概念.

2. 理解等差数列、等差中项的概念,会运用等差数列的通项公式、前 n 项和公式解决有关问题.

3. 理解等比数列、等比中项的概念,会运用等比数列的通项公式、前 n 项和公式解决有关问题.

(五) 导数

1. 理解导数的概念及其几何意义.

2. 掌握函数 $y=c$ (c 为常数), $y=x^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 的导数公式,会求多项式函数的导数.

3. 了解极大值、极小值、最大值和最小值的概念,并会用导数求多项式函数的单调区间、极大值、极小值及闭区间上的最大值和最小值.

4. 会求有关曲线的切线方程,会用导数求简单实际问题的最大值与最小值.

第二部分 三 角

(一) 三角函数及其有关概念

1. 了解任意角的概念,理解象限角和终边相同的角的概念.

2. 了解弧度的概念,会进行弧度与角度的换算.

3. 理解任意角三角函数的概念.了解三角函数在各象限的符号和特殊角的三角函数值.

(二) 三角函数式的变换

1. 掌握同角三角函数间的基本关系式、诱导公式,会用它们进行计算、化简和证明.

2. 掌握两角和、两角差、二倍角的正弦、余弦、正切的公式,会用它们进行计算、化简和证明.

(三) 三角函数的图像和性质

1. 掌握正弦函数、余弦函数的图像和性质,会用这两个函数的性质(定义域、值域、周期性、奇偶性和单调性)解决有关问题.

2. 了解正切函数的图像和性质.

3. 会求函数 $y=A \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期、最大值和最小值.

(四) 解三角形

1. 掌握直角三角形的边角关系,会用它们解直角三角形.
2. 掌握正弦定理和余弦定理,会用它们解斜三角形.

第三部分 平面解析几何

(一) 平面向量

1. 理解向量的概念,掌握向量的几何表示,了解共线向量的概念.
2. 掌握向量的加、减运算,掌握数乘向量的运算,了解两个向量共线的条件.
3. 了解平面向量的分解定理.
4. 掌握向量的数量积运算,了解其几何意义和在处理长度、角度及垂直问题的应用,了解向量垂直的条件.
5. 了解向量的直角坐标的概念,掌握向量的坐标运算.
6. 掌握平面内两点间的距离公式、线段的中点公式和平移公式.

(二) 直线

1. 理解直线的倾斜角和斜率的概念,会求直线的斜率.
2. 会求直线方程,会用直线方程解决有关问题.
3. 了解两条直线平行与垂直的条件以及点到直线的距离公式,会用它们解决简单的问题.

(三) 圆锥曲线

1. 了解曲线和方程的关系,会求两条曲线的交点.
2. 掌握圆的标准方程和一般方程以及直线与圆的位置关系,能灵活运用它们解决有关问题.
3. 理解椭圆、双曲线、抛物线的概念,掌握它们的标准方程和性质,会用它们解决有关问题.

第四部分 概率与统计初步

(一) 排列、组合

1. 了解分类计数原理和分步计数原理.
2. 了解排列、组合的意义,会用排列数、组合数的计算公式.
3. 会解排列、组合的简单应用题.

(二) 概率初步

1. 了解随机事件及其概率的意义.
2. 了解等可能性事件的概率的意义, 会用计数方法和排列组合基本公式计算一些等可能性事件的概率.
3. 了解互斥事件的意义, 会用互斥事件的概率加法公式计算一些事件的概率.
4. 了解相互独立事件的意义, 会用相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率.
5. 会计算事件在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率.

(三) 统计初步

了解总体和样本的概念, 会计算样本平均数和样本方差.

考试形式及试卷结构

考试采用闭卷笔试形式. 全卷满分为 150 分, 考试时间为 120 分钟.

试 卷 结 构

理工农医类

(一) 试卷内容比例

代数	约 45%
三角	约 15%
平面解析几何	约 20%
立体几何	约 10%
概率与统计初步	约 10%

(二) 题型比例

选择题	约 55%
填空题	约 15%
解答题	约 30%

文史财经类

(一) 试卷内容比例

代数	约 55%
三角	约 15%
平面解析几何	约 20%
概率与统计初步	约 10%

(二) 题型比例

选择题	约 55%
填空题	约 15%
解答题	约 30%

样 题

理工农医类

一、选择题:1~12 小题,每小题 7 分,共 84 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{x \in \mathbf{R} | x^2 = 1\}$, $N = \{x \in \mathbf{R} | x^3 = 1\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{1\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\emptyset$

2. 设 α 是第一象限角, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 设 $\log_2 x = a$, 则 $\log_2 (2x^2) =$

A. $2a^2 + 1$ B. $2a^2 - 1$ C. $2a - 1$ D. $2a + 1$

4. 下列函数中, 为减函数的是

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ B. $y = 3^x$
C. $y = \cos x$ D. $y = 3x^2 - 1$

5. 已知点 $M(1,2), N(2,3)$, 则直线 MN 的斜率为

- A. $\frac{5}{3}$ B. 1 C. -1 D. $-\frac{5}{3}$

6. $(1+i)^2 =$

- A. -2 B. 2 C. $-2i$ D. $2i$

7. 若向量 $\mathbf{a} = (1, -1), \mathbf{b} = (1, x)$, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 2$, 则 $x =$

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 公比 $q = 2$, 则 $a_5 =$

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. 8

9. 函数 $f(x) = -x^2 + 2x$ 的值域是

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_5 = 2$, 则 $a_1 + a_2 + a_6 + a_7 =$

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

11. 正四面体的任意两个面所成的二面角的余弦值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

12. 一个袋子中装有标号分别为 1, 2, 3, 4 的四个球, 采用有放回的方式从袋中摸球两次, 每次摸出一个球, 则恰有一次摸出 2 号球的概率为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题: 13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分。

13. 棱长为 2 的正方体中, M, N 为不共面的两条棱的中点, 则 $MN =$ _____.

14. 若点 $(2, 4)$ 在函数 $y = 2a^{x-1}$ 的图像上, 则 $a =$ _____.

15. 已知随机变量 X 的分布列是:

X	-1	0	1
P	0.5	$1-2q$	q^2

则 $q =$ _____.

三、解答题: 16~18 小题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a : b : c = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$, 求 A, B, C .

17. (15 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到准线的距离为 1.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $A(1, m) (m > 0)$ 为 C 上一点, O 为坐标原点, 求 C 上另一点 B 的坐标, 使得 $OA \perp OB$.

18. (15 分)

设函数 $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6x + 1$ 是增函数.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 的最小值为 9, 求 a .

参 考 答 案

一、选择题

1. A 2. C 3. D 4. A 5. B 6. D
7. C 8. D 9. B 10. C 11. B 12. C

二、填空题

13. $\sqrt{6}$ 14. 2 15. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题

16. 解:

由题设可设 $a = 2k, b = \sqrt{6}k, c = (\sqrt{3} + 1)k$, 其中 $k > 0$.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}, A = 45^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, B = 60^\circ.$$

$$C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

17. 解:

(1) 由题设可得 $p=1$, 故 C 的方程为 $y^2=2x$.

(2) 因为 $A(1, m) (m>0)$ 为 C 上一点, 所以 $m=\sqrt{2}$.

设 $B\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right)$, 且 $OA \perp OB$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2} y_1 = 0$, 解得

$y_1=0$ (舍去), 或 $y_1=-2\sqrt{2}$, 故 B 的坐标为 $(4, -2\sqrt{2})$.

18. 解:

$$(1) f'(x) = 6x^2 + 6ax + 6.$$

因为 $f(x)$ 是增函数, 所以 $f'(x) = 6x^2 + 6ax + 6 \geq 0$.

$$\Delta = 36(a^2 - 4) \leq 0, \quad -2 \leq a \leq 2.$$

所以 a 的取值范围为 $[-2, 2]$.

(2) 因为 $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6x + 1$ 是增函数, $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 的最小值在 $x=1$ 时取到, $f(1) = 9 + 3a = 9, a=0$.

文史财经类

一、选择题: 1~12 小题, 每小题 7 分, 共 84 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{x \in \mathbf{R} | x^2 = 1\}$, $N = \{x \in \mathbf{R} | x^3 = 1\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{1\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\emptyset$

2. 函数 $y = \sin(x + 11)$ 的最大值是

- A. 11 B. 1 C. -1 D. -11

3. 设 α 是第一象限角, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 设 $\log_2 x = a$, 则 $\log_2 (2x^2) =$

A. $2a^2+1$ B. $2a^2-1$ C. $2a-1$ D. $2a+1$

5. 下列函数中,为减函数的是

A. $y=\log\frac{1}{2}x$ B. $y=3^x$ C. $y=\cos x$ D. $y=3x^2-1$

6. 已知点 $M(1,2), N(2,3)$, 则直线 MN 的斜率为

A. $\frac{5}{3}$ B. 1 C. -1 D. $-\frac{5}{3}$

7. 设甲: $a>1$ 且 $b>1$; 乙: $a+b>2$. 则

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 若向量 $\mathbf{a}=(1,-1), \mathbf{b}=(1,x)$, 且 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=2$, 则 $x=$

A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$, 公比 $q=2$, 则 $a_5=$

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. 8

10. 函数 $f(x)=-x^2+2x$ 的值域是

A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

11. 中心在坐标原点, 对称轴为坐标轴, 且一个顶点为 $(3,0)$, 虚轴长为 8 的双曲线的方程是

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ B. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ C. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1$ D. $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{9}=1$

12. 一个袋子中装有标号分别为 1, 2, 3, 4 的四个球, 采用有放回的方式从袋中摸球两次, 每次摸出一个球, 则恰有一次摸出 2 号球的概率为

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题: 13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6, BC=4, AC=5$, 则 $\cos A=$ _____.

14. 若点 $(2,4)$ 在函数 $y=2a^{x-1}$ 的图像上, 则 $a=$ _____.

15. 九个学生期末考试的成绩分别为

79 63 88 94 99 77 89 81 85,

这九个学生成绩的中位数为_____.

三、解答题:16~18 小题,每小题 15 分,共 45 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (15 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + a_5 = 6$, $a_2 + a_4 + a_6 = 12$, 求 $\{a_n\}$ 的首项与公差.

17. (15 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到准线的距离为 1.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $A(1, m) (m > 0)$ 为 C 上一点, O 为坐标原点, 求 C 上另一点 B 的坐标, 使得 $OA \perp OB$.

18. (15 分)

已知函数 $f(x) = (x-4)(x^2 - a)$.

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 若 $f'(-1) = 8$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 的最大值与最小值.

参 考 答 案

一、选择题

1. A 2. B 3. C 4. D 5. A 6. B
7. A 8. C 9. D 10. B 11. A 12. C

二、填空题

13. $\frac{3}{4}$ 14. 2 15. 85

三、解答题

16. 解:

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\begin{cases} 3a_1 + 6d = 6, \\ 3a_1 + 9d = 12. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = -2, \\ d = 2. \end{cases}$$

17. 解:

(1) 由题设可得 $p=1$, 故 C 的方程为 $y^2=2x$.

(2) 因为 $A(1, m) (m>0)$ 为 C 上一点, 所以 $m=\sqrt{2}$.

设 $B\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right)$, 且 $OA \perp OB$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\frac{y_1^2}{2} + \sqrt{2}y_1 = 0$, 解

得 $y_1=0$ (舍去), 或 $y_1=-2\sqrt{2}$, 故 B 的坐标为 $(4, -2\sqrt{2})$.

18. 解:

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 8x - a.$$

$$(2) \text{由 } f'(-1) = 8, \text{ 得 } a = 3.$$

$$\text{令 } f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 0, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 3.$$

$$f(0) = 12, \quad f(3) = -6, \quad f(4) = 0.$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 的最大值为 12, 最小值为 -6.