

# 2023 年成人高等学校招生全国统一考试

## 高起专数学(理) (回忆版)

一、选择题:(本大题 17 小题, 每小题 5 分, 共 85 分, 在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的。)

1. 设集合  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ ,  $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 1\}$ , 则  $M \cap N =$  (A)

A. (1) B. (-1) C. (-1, 1) D. 空集

2. 函数  $y = \sin(x + 11)$  的最大值是()

A. 11 B. 1 C. -1 D. -11

3. 设  $\alpha$  是第一象限角,  $\sin \alpha = 1/3$ , 则  $\sin 2\alpha =$  (C)

A. 4/9 B.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  C.  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$  D. 2/3

4. 设  $\log_2 c = \alpha$ , 则  $\log_2 (2ac^2) =$  ( )

A.  $2\alpha + 1$

B.  $2\alpha - 1$

C.  $2\alpha - 1$

D.  $2\alpha + 1$

5. 设甲:  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  乙:  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则()

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

6. 下列函数中, 为增函数的是()

A.  $y = 3$

B.  $y = c^2$

C.  $y = -x^2$

D.  $y = -x^3$

7. 已知点  $M(1, 2)$ ,  $N(2, 3)$  则直线  $MN$  的斜率为()

A. 5/3 B. 1 C. -1 D. -5/3

8.  $(1+i)^2 =$

A. -2

B. 2

C. -2i

D. 2i

9. 若向量  $a = (1, -1)$ ,  $b = (1, x)$  且  $a + b = 2$ , 则  $x =$

A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

10.  $(x^3 + 1/4)^4$  展开式中的常数项为

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

11. 向量  $a=(1,1,0), b=(1,2,3)$ , 则  $a \cdot b =$

A. 2 B. 3 C. 6 D. 8

12. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = 1$ , 公比  $q=2$ , 则  $a_5 = \{ \}$

A.  $1/8$  B.  $1/4$  C. 4 D. 8

13. 函数  $f(x) = -x^2 + 2x$  的值域是 ( )

A.  $(0, +\infty)$

B.  $(1, +\infty)$

C.  $(-\infty, 1)$

D.  $(-\infty, 0)$

14. 设函数

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 过点  $(2, 0)$  作图  $x^2 + y^2 = 16$  的切线, 切点的横坐标为 2

19. 曲线  $y =$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程是  $2X + Y - 3 = 0$

20. 函数  $y = -x^2 + ax$  图像的对称轴为  $x = 2$ , 则  $a = 4$

21. 九个学生期末考试的成绩为 79, 63, 88, 94, 99, 77, 89, 81, 85, 这九个学生成绩中的中位数为 85

三、解答愿, (本大题共 4 小题, 共 49 分, 解答应写出推理, 演算步骤)

22. 记  $\triangle ABC$  的角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B = 60^\circ$ ,  $b^2 = ac$ , 求  $A$

已知  $\triangle ABC$  的角  $B = 60^\circ$ ,  $b^2 = ac$ 。

解: 根据余弦定理, 有:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

因为  $B = 60^\circ$ , 所以  $\cos B = 1/2$

代入上式, 得:

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac$$

又因为  $b^2 = ac$ , 所以  $a^2 + c^2 = ac$

所以  $a = c$

根据正弦定理, 有:

$$\sin A = a \sin B$$

因为  $a = c$ , 所以  $\sin A = \sin C$

因为  $A + C = 180^\circ - B = 120^\circ$ , 所以  $A = C$

所以  $A = 60^\circ$

23. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1+a_3+a_5=6$ ,  $a_2+a_4+a_6=12$ , 求  $\{a_n\}$  的首项与公差

解: 设等差数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a$ , 公差为  $d$ 。根据题意, 已知  $a_1+a_3+a_5=6$ ,  $a_2+a_4+a_6=12$ 。根据等差数列的性质, 可以得到  $a_n=a_1+(n-1)d$ , 其中  $n$  为项数。

将  $n$  分别代入 1、2、3、4、5、6, 得到以下式子:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a+d$$

$$a_3 = a+2d$$

$$a_4 = a+3d$$

$$a_5 = a+4d$$

$$a_6 = a+5d$$

将这些值代入已知条件, 可以得到:

$$a_1+a_3+a_5 = a+(a+2d)+(a+4d) = 3a + 6d = 6 \quad \text{--- (1)}$$

$$a_2+a_4+a_6 = (a+d)+(a+3d)+(a+5d) = 3a + 9d = 12 \quad \text{--- (2)}$$

将式子(1)和式子(2)组成一个方程组:

$$3a + 6d = 6$$

$$3a + 9d = 12$$

通过消元法或代入法求解上述方程组, 可以得到  $a=-2$  和  $d=2$ 。

因此, 等差数列  $\{a_n\}$  的首项为  $-2$ , 公差为  $2$ 。

24, 已知抛物线  $C: y^2=2px$  ( $p>0$ ) 的焦点到准线的距离为 1

(1) 求  $C$  的方程

(2) 若  $A(1, m)$  ( $m>0$ ) 为  $C$  上一点,  $O$  为坐标原点, 求  $C$  上另一点  $B$  的坐标, 使得  $OA \perp OB$

解: (1) 由于焦点到准线的距离为  $p$ , 已知焦点到准线的距离为 1, 我们可以得到  $p=1$ 。将  $p$  代入抛物线的方程  $y^2=2px$ , 即可得到  $C$  的方程为  $y^2=2x$ 。

(2) 设点  $B$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ 。由于  $OA \perp OB$ , 可以得到向量  $OA$  与向量  $OB$  的点积为 0。点  $A(1, m)$ , 点  $B(x_1, y_1)$ 。所以有向量  $OA \cdot$  向量  $OB=0$ , 即  $(1, m) \cdot (x_1, y_1)=0$ 。根据点积的定义, 可以得到  $1 \cdot x_1 + m \cdot y_1 = 0$ , 将点  $A$  的坐标  $(1, m)$  和上述方程整理, 可得:  $x_1 + m \cdot y_1 = 0$ 。

由于点  $B$  在抛物线  $C$  上, 满足  $C$  的方程  $y^2=2x$ 。将点  $B$  的坐标  $(x_1, y_1)$  代入  $C$  的方程可以得到  $y_1^2=2x_1$ 。

综合以上两个方程组成的方程组:

$$x_1 + m \cdot y_1 = 0$$

$$y_1^2=2x_1$$

可以通过求解方程组来确定点  $B$  的坐标。将  $x_1$  的值代入到第一个方程, 可以解出  $y_1$  的值。然后再将  $y_1$  的值代入到第二个方程, 解得  $x_1$  的值。

具体计算过程就是将  $x_1 + m \cdot y_1 = 0$  带入  $y_1^2=2x_1$  中, 得到  $m^2 y_1^2=2x_1$ 。代入  $m = y_1 / x_1$ , 得到  $(y_1 / x_1)^2 \cdot y_1^2=2x_1$ , 化简得到  $y_1^4=2x_1^3$ 。这时我们可将  $y_1^4=2x_1^3$  变形为  $(x_1/y_1)^3=1/2$ 。令  $t=x_1/y_1$ , 那么  $t^3=1/2 \Rightarrow (2t)^3=1 \Rightarrow 8t^3=1$ 。解出  $t$  的值为  $t=1/2$ 。

因此,  $t=x_1/y_1=1/2$ , 将  $t$  代回方程  $x_1 + m \cdot y_1 = 0$  中, 得到  $x_1 + (y_1/2) = 0$ , 整理得到即  $y_1 = -2x_1$ 。

所以坐标为  $(x_1, y_1) = (x_1, -2x_1)$ 。

综上所述，C 上满足条件  $OA \perp OB$  的点 B 的坐标为  $(x_1, y_1) = (x_1, -2x_1)$ 。

25. 已知函数  $f(x) = (x-4)(x^2-a)$

(1) 求  $f'(x)$

(2)  $f'(-1) = 8$ ，求  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  的最大值与最小值

解：(1) 已知函数  $f(x) = (x-4)(x^2-a)$

求  $f'(x)$

根据导数的定义， $f'(x) = (x-4)'(x^2-a) + (x-4)(x^2-a)'$

其中， $(x-4)' = 1$ ， $(x^2-a)' = 2x-a$

所以， $f'(x) = 1(x^2-a) + (x-4)(2x-a)$

化简得： $f'(x) = x^3 - (3a+4)x + 4a$

根据题意， $f'(-1) = 8$ ，即  $(-1)^3 - (3a+4)(-1) + 4a = 8$

化简得： $a = -1$

将  $a$  代入  $f'(x)$ ，得： $f'(x) = x^3 + x + 2$  (2) 根据导数与函数单调性的关系，当  $f'(x) > 0$

时，函数单调递增；当  $f'(x) < 0$  时，函数单调递减

所以，当  $x^3 + x + 2 > 0$  时，函数单调递增；当  $x^3 + x + 2 < 0$  时，函数单调递减

根据求导法则，我们可以得到函数  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  的导数：

$$f'(x) = x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2+1)$$

根据导数与函数单调性的关系，我们可以得到函数  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  的单调性：

当  $0 \leq x \leq 1$  时， $f'(x) < 0$ ，函数单调递减；

当  $1 < x \leq 4$  时， $f'(x) > 0$ ，函数单调递增；

根据函数的极值定理，当函数在某点的导数为 0 时，该点可能是函数的极值点。

所以，当  $f'(x) = 0$  时，即  $x = -1$  或  $x = 0$  时，函数可能取得极值。

将  $x=-1$  代入  $f(x)$ , 得:  $f(-1)=(-1-4)((-1)^2-a)=5(-1+a)$

将  $x=0$  代入  $f(x)$ , 得:  $f(0)=(0-4)(0^2-a)=-4a$

因为  $a=-1$ , 所以  $f(-1)=5(-1+a)=5(-1+-1)=-10$

因为  $a=-1$ , 所以  $f(0)=-4a=-4(-1)=4$

所以, 函数  $f(x)$  在区间  $[0,4]$  的最大值为 4, 最小值为 -10。