

2023 年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学二

(回忆版真题)

一、选择题：1~10 小题。每小题 4 分。共 40 分。

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}$

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. \checkmark 1

2. 设函数 $f(x) = x^3 + 5 \sin x$, 则 $f'(0) =$

- A. \checkmark 5 B. 3 C. 1 D. 0

3. 设函数 $f(x) = \ln x - x$, 则 $f'(x) =$

- A. x B. $x-1$ C. $\frac{1}{x}$ D. \checkmark $\frac{1}{x} - 1$

4. 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(3, \infty)$ B. $(-\infty, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. \checkmark $(0, 3)$

【分析】

本题主要考查了极限及其运算，属于基础题。根据极限的定义直接计算即可。

【解答】

解： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$

5. $\int x^3 dx = ().$

- A. $x^{\frac{2}{3}} + c$ B. \checkmark $\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$ C. $x^{\frac{5}{3}} + c$ D. $x^{\frac{1}{3}} + c$

6. 设函数 $f(x) = |x|$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$ 【 】

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

答案: C

7. 连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$, 求 $f'(x) =$ 【 】

A. e^x

B. $e^x - 1$

C. $e^x + 1$

D. $x + 1$

答案: A

8. 设 $z = e^{xy}$, $dz =$ 【 】

A. $e^{xy} dx + e^{xy} dy$

B. $e^x dx + e^y dy$

C. $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$

D. $e^y dx + e^x dy$

答案: C

9. 设 $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 【 】

A. $\frac{x}{2}$

B. 0

C. $\frac{y}{2}$

D. $x + y$

答案: B

10. 扔硬币5次, 3次正面朝上的概率是 【 】

本题选项缺失

答案: $\frac{5}{16}$

第II卷（选择题，共110分）

二、填空题（11~20小题，每题4分，共40分）

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $\frac{1}{4}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: e^2

13. $f(x) = e^{2x}$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: 2^n

14. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线与直线 $y = x - 1$ 平行, $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $\frac{3}{2}$

15. 曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$

答案: $(-2, -2e^{-2})$

16. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的垂直渐近线是 $\underline{\hspace{2cm}}$

答案: $y=0$

17. $\int \frac{x}{x^2+4} dx =$ _____.

答案: $\frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C$

18. 曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成图形的面积是 _____.

答案: $\frac{1}{3}$

19. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx =$ _____.

答案: $\frac{1}{2}$

20. $z = x^2 + y^2 - x - y - xy$ 的驻点为 _____.

答案: $(1,1)$

三、解答题 (21~28小题, 共70分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分8分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.

22. (本题满分8分)

设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 dy .

解: $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})'$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$dy = y' dx = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

23. (本题满分8分)

计算 $\int x^2 \cos x dx$.

解: $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - \int \sin x dx$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2 \int x d \cos x \\
 &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx \\
 &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C
 \end{aligned}$$

24. (本题满分8分)

计算 $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$.

解: $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-x^2)$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} (0-1) = \frac{1}{3}.$$

25. (本题满分8分)

现有3个白球2个黑球, 从中抽3个, 用 X 表示抽中白球的个数

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求期望 EX .

解: (1) $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$,

$$P\{X=1\} = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

$$P\{X=3\} = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(2) $EX = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}.$

26. 要做一个容积为 V 立方米的密闭圆柱形容器，两底面材料价格为每平方米 a 元，侧面材料价格为每平方米 b 元，问圆柱体底面半径与高地等于多少时，造价最低？

【答案】

设底面半径为 r ，高为 h

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

造价 Y

27. 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

26. (本题满分10分)

27. (本题满分10分)

证明: $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

解: 设 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$,

$x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数单调递增.

28. 设当 $f(x, y) = \frac{1}{2} (x^n + y^n)$, n 为大于 1 的整数, 求在条件 $x+y=c$ 下 $f(x, y)$ 的最小值, 其中 $x > 0, y > 0, c$ 为正常数。

故 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$,

即 $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

28. (本题满分10分)

求 $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ 在条件 $x + y = c$ 下的最小值.

解: 设 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - c)$,

$$L_x = \frac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0,$$

$$L_y = \frac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0,$$

$$L_z = x + y - c = 0,$$

解得 $x^{n-1} = y^{n-1}$, $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n) = \frac{1}{2} \cdot 2x^n = x^n$.