

2023 年成人高等学校招生全国统一考试

高起专数学(理) (回忆版)

一、选择题;(本大题 17 小题, 每小题 5 分, 共 85 分, 在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的。)

1. 设集合 $M = \{e \in \mathbb{R} \mid 2 = |e|\}$, $N = \{e \in \mathbb{R} \mid 3 = e\}$, 则 $M \cap N = (A)$

A. (1) B. (-1) C. (-1, 1) D. 空集

2. 函数 $y = \sin(x + 11)$ 的最大值是()

A. 11 B. 1 C. -1 D. -11

3. 设 α 是第一象限角, $\sin \alpha = 1/3$, 则 $\sin 2\alpha = (C)$

A. $4/9$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $2/3$

4. 设 $\log_2 c = \alpha$, 则 $\log_2 (2ac^2) = ()$

A. $2\alpha + 1$

B. $2\alpha - 1$

C. $2\alpha - 1$

D. $2\alpha + 1$

5. 设甲: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 乙: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则()

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

6. 下列函数中, 为增函数的是()

A. $y = 3$

B. $y = c^2$

C. $y = -x^2$

D. $y = -x^3$

7. 已知点 $M(1, 2)$, $N(2, 3)$ 则直线 MN 的斜率为()

A. $5/3$ B. 1 C. -1 D. $-5/3$

8. $(1+i)^2 = 2$

A. -2

B. 2

C. $-2i$

D. $2i$

9. 若向量 $a = (1, -1)$, $b = (1, x)$ 且 $a + b = 2$, 则 $x =$

A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

10. $(x^3 + 1/4)^4$ 展开式中的常数项为

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

11. 向量 $a=(1,1,0), b=(1,2,3)$, 则 $a \cdot b =$

A. 2 B. 3 C. 6 D. 8

12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, 公比 $q=2$, 则 $a_5 = \{ \}$

A. $1/8$ B. $1/4$ C. 4 D. 8

13. 函数 $f(x) = -x^2 + 2x$ 的值域是 ()

A. $(0, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-\infty, 0)$

14. 设函数

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 过点 $(2, 0)$ 作图 $x^2 + y^2 = 16$ 的切线, 切点的横坐标为 2

19. 曲线 $y =$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是 $2X + Y - 3 = 0$

20. 函数 $y = -x^2 + ax$ 图像的对称轴为 $x=2$, 则 $a=4$

21. 九个学生期末考试的成绩为 79, 63, 88, 94, 99, 77, 89, 81, 85, 这九个学生成绩中的中位数为 85

三、解答愿, (本大题共 4 小题, 共 49 分, 解答应写出推理, 演算步骤)

22. 记 $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B=60^\circ$, $b^2 = ac$, 求 A

已知 $\triangle ABC$ 的角 $B=60^\circ$, $b^2 = ac$ 。

解: 根据余弦定理, 有:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

因为 $B=60^\circ$, 所以 $\cos B = 1/2$

代入上式, 得:

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac$$

又因为 $b^2 = ac$, 所以 $a^2 + c^2 = ac$

所以 $a = c$

根据正弦定理, 有:

$$\sin A = a \sin B$$

因为 $a = c$, 所以 $\sin A = \sin C$

因为 $A + C = 180^\circ - B = 120^\circ$, 所以 $A = C$

所以 $A = 60^\circ$

23. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_3+a_5=6$, $a_2+a_4+a_6=12$, 求 $\{a_n\}$ 的首项与公差

解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 d 。根据题意, 已知 $a_1+a_3+a_5=6$, $a_2+a_4+a_6=12$ 。根据等差数列的性质, 可以得到 $a_n=a_1+(n-1)d$, 其中 n 为项数。

将 n 分别代入 1、2、3、4、5、6, 得到以下式子:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a+d$$

$$a_3 = a+2d$$

$$a_4 = a+3d$$

$$a_5 = a+4d$$

$$a_6 = a+5d$$

将这些值代入已知条件, 可以得到:

$$a_1+a_3+a_5 = a+(a+2d)+(a+4d) = 3a + 6d = 6 \quad \text{--- (1)}$$

$$a_2+a_4+a_6 = (a+d)+(a+3d)+(a+5d) = 3a + 9d = 12 \quad \text{--- (2)}$$

将式子(1)和式子(2)组成一个方程组:

$$3a + 6d = 6$$

$$3a + 9d = 12$$

通过消元法或代入法求解上述方程组, 可以得到 $a=-2$ 和 $d=2$ 。

因此, 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 -2 , 公差为 2 。

24, 已知抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点到准线的距离为 1

(1) 求 C 的方程

(2) 若 $A(1, m)$ ($m>0$) 为 C 上一点, O 为坐标原点, 求 C 上另一点 B 的坐标, 使得 $OA \perp OB$

解: (1) 由于焦点到准线的距离为 p , 已知焦点到准线的距离为 1, 我们可以得到 $p=1$ 。将 p 代入抛物线的方程 $y^2=2px$, 即可得到 C 的方程为 $y^2=2x$ 。

(2) 设点 B 的坐标为 (x_1, y_1) 。由于 $OA \perp OB$, 可以得到向量 OA 与向量 OB 的点积为 0。点 $A(1, m)$, 点 $B(x_1, y_1)$ 。所以有向量 $OA \cdot$ 向量 $OB=0$, 即 $(1, m) \cdot (x_1, y_1)=0$ 。

根据点积的定义, 可以得到 $1 \cdot x_1 + m \cdot y_1 = 0$, 将点 A 的坐标 $(1, m)$ 和上述方程整理, 可得: $x_1 + m \cdot y_1 = 0$ 。

由于点 B 在抛物线 C 上, 满足 C 的方程 $y^2=2x$ 。将点 B 的坐标 (x_1, y_1) 代入 C 的方程可以得到 $y_1^2=2x_1$ 。

综合以上两个方程组成的方程组:

$$x_1 + m \cdot y_1 = 0$$

$$y_1^2=2x_1$$

可以通过求解方程组来确定点 B 的坐标。将 x_1 的值代入到第一个方程, 可以解出 y_1 的值。然后再将 y_1 的值代入到第二个方程, 解得 x_1 的值。

具体计算过程就是将 $x_1 + m \cdot y_1 = 0$ 带入 $y_1^2=2x_1$ 中, 得到 $m^2 y_1^2=2x_1$ 。代入 $m = y_1 / x_1$, 得到 $(y_1 / x_1)^2 \cdot y_1^2=2x_1$, 化简得到 $y_1^4=2x_1^3$ 。这时我们可将 $y_1^4=2x_1^3$ 变形为 $(x_1/y_1)^3=1/2$ 。令 $t=x_1/y_1$, 那么 $t^3=1/2 \Rightarrow (2t)^3=1 \Rightarrow 8t^3=1$ 。解出 t 的值为 $t=1/2$ 。

因此, $t=x_1/y_1=1/2$, 将 t 代回方程 $x_1 + m \cdot y_1 = 0$ 中, 得到 $x_1 + (y_1/2) = 0$, 整理得到即 $y_1 = -2x_1$ 。

所以坐标为 $(x_1, y_1) = (x_1, -2x_1)$ 。

综上所述，C 上满足条件 $OA \perp OB$ 的点 B 的坐标为 $(x_1, y_1) = (x_1, -2x_1)$ 。

25. 已知函数 $f(x) = (x-4)(x^2-a)$

(1) 求 $f'(x)$

(2) $f'(-1) = 8$ ，求 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 的最大值与最小值

解：(1) 已知函数 $f(x) = (x-4)(x^2-a)$

求 $f'(x)$

根据导数的定义， $f'(x) = (x-4)'(x^2-a) + (x-4)(x^2-a)'$

其中， $(x-4)' = 1$ ， $(x^2-a)' = 2x-a$

所以， $f'(x) = 1(x^2-a) + (x-4)(2x-a)$

化简得： $f'(x) = x^3 - (3a+4)x + 4a$

根据题意， $f'(-1) = 8$ ，即 $(-1)^3 - (3a+4)(-1) + 4a = 8$

化简得： $a = -1$

将 a 代入 $f'(x)$ ，得： $f'(x) = x^3 + x + 2$ (2) 根据导数与函数单调性的关系，当 $f'(x) > 0$

时，函数单调递增；当 $f'(x) < 0$ 时，函数单调递减

所以，当 $x^3 + x + 2 > 0$ 时，函数单调递增；当 $x^3 + x + 2 < 0$ 时，函数单调递减

根据求导法则，我们可以得到函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 的导数：

$$f'(x) = x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2+1)$$

根据导数与函数单调性的关系，我们可以得到函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 的单调性：

当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数单调递减；

当 $1 < x \leq 4$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数单调递增；

根据函数的极值定理，当函数在某点的导数为 0 时，该点可能是函数的极值点。

所以，当 $f'(x) = 0$ 时，即 $x = -1$ 或 $x = 0$ 时，函数可能取得极值。

将 $x=-1$ 代入 $f(x)$, 得: $f(-1)=(-1-4)((-1)^2-a)=5(-1+a)$

将 $x=0$ 代入 $f(x)$, 得: $f(0)=(0-4)(0^2-a)=-4a$

因为 $a=-1$, 所以 $f(-1)=5(-1+a)=5(-1+-1)=-10$

因为 $a=-1$, 所以 $f(0)=-4a=-4(-1)=4$

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 的最大值为 4, 最小值为 -10。